Esercizi svolti sulle equazioni esponenziali

1) $\left(2^x\right)^{1-x}=\dfrac{1}{4^{x-1}}$

Scriviamo l'equazione nella forma

$2^{x(1-x)}=2^{-2(x-1)}$;

uguagliando gli esponenti si ha l'equazione

$x(1-x)=-2(x-1)$,

equivalente all'equazione di secondo grado

$(x-1)(2-x)=0$,

le cui radici sono $x_1=1$, $x_2=2$.

2) $\sqrt[x]{5\sqrt{5^{2-x}}}=5^{\frac{3x}{10+x}}$

Riconducendo l'equazione all'uguaglianza di due potenze aventi per base 5, basterà uguagliare gli esponenti.

$\left(5\cdot5^{\frac{2-x}{2}}\right)^{\frac{1}{x}}=5^{\frac{3x}{10+x}}$, da cui $5^{\left(1+\frac{2-x}{2}\right)\frac{1}{x}}=5^{\frac{3x}{10+x}}$ e quindi deve risultare

$\dfrac{4-x}{2x}=\dfrac{3x}{10+x}$.

Con $x\neq0$ e $x\neq-10$ si libera l'equazione dai denominatori ottenendo l'equazione

$7x^2+6x-40=0$.

Quest'equazione ammette come radici $x_1=-2$, $x_2=\dfrac{20}{7}$. I due valori ottenuti sono accettabili perché verificano le due condizioni indicate sopra $x\neq0$, $x\neq-10$ e sono le uniche soluzioni dell'equazione esponenziale di partenza.

3) $3^{2x}-5\cdot12^x+9\cdot4^{2x-1}=0$

Si deve elaborare il primo membro per ricondurlo ad una forma più accessibile. Si ha:

$\dfrac{3^{2x}}{4^{2x}}-\dfrac{5\cdot12^x}{4^{2x}}+\dfrac{9\cdot4^{2x-1}}{4^{2x}}=0$, da cui

$\left(\frac{3}{4}\right)^{2x}-\frac{5\cdot 3^x\cdot 4^x}{\left(4^x\right)^2}+\frac{9}{4}=0$, ed ancora $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x}-5\left(\frac{3}{4}\right)^{x}+\frac{9}{4}=0$.

Possiamo porre $\left(\frac{3}{4}\right)^{x}=t$ ottenendo l'equazione ausiliaria $t^2-5t+\frac{9}{4}=0$, che ammette come radici $t_1=\frac{1}{2}$, $t_2=\frac{9}{2}$. Ritornando all'incognita x si hanno le due equazioni

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x}=\frac{1}{2}$, da cui si ha $x=\log_{\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{2}\right)=-\log_{\frac{3}{4}}2=\ldots=\frac{1}{2-\log_2 3}$;

b) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x}=\frac{9}{2}$, da cui $x=\log_{\frac{3}{4}}\left(\frac{9}{2}\right)$, o anche, cambiando base al logaritmo,

$$x=\frac{\log_3\left(\frac{9}{2}\right)}{\log_3\left(\frac{3}{4}\right)}=\frac{\log_3 9-\log_3 2}{\log_3 3-\log_3 4}\text{, e infine } x=\frac{2-\log_3 2}{1-2\log_3 2}.$$

4) $e^{3-x}=\frac{1}{9^{x+e}}$

L'equazione si può ridurre alla forma seguente $e^{3-x}=3^{-2(e+x)}$.

Poiché deve sussistere l'uguaglianza tra due potenze con basi diverse, per risolvere l'equazione applichiamo a due membri i logaritmi naturali (base e=2,718281…). Si ha:

$\log e^{3-x}=\log 3^{-2(e+x)}$, da cui, per la proprietà della potenza del logaritmo si ottiene

$(3-x)\log e=-2(e+x)\log 3$, quindi $3-x=-2(e+x)\log 3$, dunque

$x(2\log 3-1)=-2e\log 3-3$ e infine $x=\frac{3+2e\log 3}{1-2\log 3}$.

5) $1+\frac{1}{2\left(1-2^{-x}\right)}=2^x$

Dopo aver scritto l'equazione nella forma equivalente

$$1+\frac{1}{2\left(1-2^{-x}\right)}=\frac{1}{2^{-x}},$$

si può porre $2^{-x}=t$, ottenendo l'equazione razionale fratta

$1+\frac{1}{2(1-t)}=\frac{1}{t}$ che dopo alcune semplificazioni si riconduce all'equazione equivalente $2t^2-5t+2=0$.

Le radici di quest'equazione sono $t_1=\frac{1}{2}$, $t_2=2$. Tornando all'incognita x si ha

$t_1=\frac{1}{2}\rightarrow\ 2^{-x}=\frac{1}{2}=2^{-1}$, quindi x=1;

$t_2=2\rightarrow 2^{-x}=2$, quindi x=-1.

Concludiamo che l'insieme delle soluzioni dell'equazione è $S=\{-1;1\}$.

6) Considerata l'equazione parametrica

$$e^{\frac{x}{2}}=\frac{e^x}{e^{-x}+k}$$

determinare per quale valore del parametro k essa ammette come radice x=2. Successivamente, per il valore trovato per k, risolvere la corrispondente equazione numerica.

Soluzione

Primo quesito

Se x=2 deve essere radice dell'equazione allora deve sussistere l'uguaglianza

$e=\frac{e^2}{e^{-2}+k}$, che diventa $1=\frac{e}{e^{-2}+k}$, per cui deve risultare $k=e-e^{-2}$.

Secondo quesito

L'equazione numerica corrispondente al valore $k=e-e^{-2}$ è

$$e^{\frac{x}{2}}=\frac{e^x}{e^{-x}+e-e^{-2}} \tag{6.1}$$

Ponendo nell'equazione ottenuta $e^{\frac{x}{2}}=t$, si ha $e^x=e^{2\cdot\frac{x}{2}}=t^2$ e $e^{-x}=t^{-2}$. L'equazione nell'incognita t diventa

$$t=\frac{t^2}{t^{-2}+e-e^{-2}},$$

e poiché evidentemente risulta $t=e^{\frac{x}{2}}\neq 0$ per ogni x reale si possono dividere i due membri dell'equazione per t ottenendo l'equazione equivalente

$$1=\frac{t}{t^{-2}+e-e^{-2}},$$

che si riconduce, con alcune elaborazioni, alla seguente

$$t^3+\left(e^{-2}-e\right)t^2-1=0. \qquad (6.2)$$

Si tratta di un'equazione di terzo grado e per risolverla ricordiamo che una radice dell'equazione di partenza in x è x=2, dunque l'equazione ottenuta ammette come una delle sue radici il valore $t=e^{\frac{2}{2}}=e$, per cui il polinomio $P(t)=t^3+\left(e^{-2}-e\right)t^2-1$ è divisibile per il binomio (*t*-*e*) e ciò permette di scomporre agevolmente in fattori il polinomio stesso.

Eseguendo la divisione $P(t):(t-e)$ si ottiene come quoziente $Q(t)=t^2+e^{-2}t+e^{-1}$; in definitiva l'equazione (6.2) si riconduce alla forma

$$(t-e)\left(t^2+e^{-2}t+e^{-1}\right)=0 \qquad (6.3)$$

Uguagliando a zero il fattore di primo grado si ottiene la radice già nota *t*=*e*. Uguagliando a zero il fattore di secondo grado si ottiene l'equazione

$$t^2+e^{-2}t+e^{-1}=0 \qquad (6.3.1)$$

il cui discriminante è

$$\Delta=\left(e^{-2}\right)^2-4e^{-1}=e^{-4}-4e^{-1}=e^{-1}\left(e^{-3}-4\right)$$

che è negativo perché $e^{-3}<4$.

e quindi l'equazione (6.3.1) non ammette radici reali; pertanto, si può concludere che l'equazione (6.1) ammette solo la soluzione x=2.