Esercizi sul teorema di Rolle

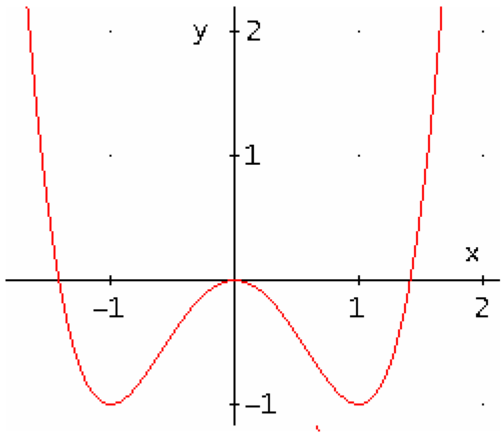
Stabilire se ciascuna delle funzioni di seguito indicate nel rispettivo intervallo assegnato soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle ed in caso affermativo determinare il punto (o i punti) previsti nella tesi del teorema.

a) $f(x)=x^4-2x^2$, in $[-1;1]$

La funzione è definita su tutto R, è continua e derivabile, inoltre, risulta f(-1)=f(1)=-1. Soddisfa pertanto le ipotesi del teorema di Rolle. Determiniamo la derivata prima ed uguagliamola a zero.

$f'(x)=4x^3-4x=\ 4x(x^2-1)=0$

L'equazione è soddisfatta per $x_1=0$, $x_2=-1$, $x_3=1$ dei quali però solo x=0 è interno all'intervallo assegnato e rappresenta l'unico punto che verifica la tesi del teorema.



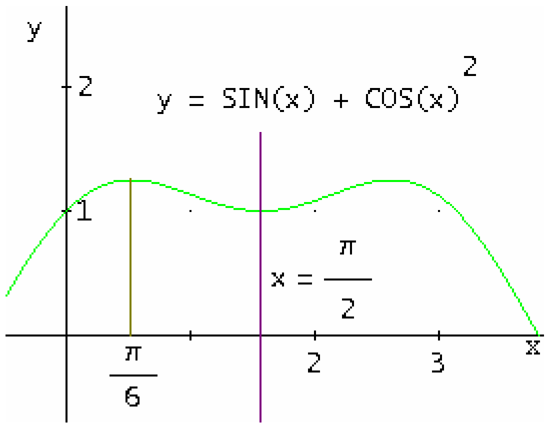
b) $f(x)=senx+\cos^2 x$, in $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

La funzione è definita su tutto R, è continua e derivabile, inoltre, risulta f(0)=f(π/2)= 1. Soddisfa pertanto le ipotesi del teorema di Rolle. Determiniamo la derivata prima ed uguagliamola a zero.

$f'(x)=\cos x-2\cos x\cdot senx=\ \cos x\left(1-2senx\right)=0$

La derivata prima, limitatamente all'intervallo $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$,

si annulla nei punti $x_1=\dfrac{\pi}{6}$, $x_2=\dfrac{\pi}{2}$, dei quali il primo è interno all'intervallo e dunque è quello che verifica la tesi del teorema.



c) $f(x)=\log(x+2x^2)$, in $\left[-1;\dfrac{1}{2}\right]$

Osserviamo subito che la funzione è definita nell'insieme $\left]-\infty;-\dfrac{1}{2}\right[\cup\left]0;+\infty\right[$ e l'intervallo assegnato non è contenuto nel dominio. Cade dunque la condizione sulla definizione della funzione nell'intervallo assegnato; il teorema di Rolle non è applicabile.

d) $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$, in [0;1]

La funzione è definita nell'intervallo chiuso [-1;1] ed è ivi continua, dunque è assicurata la continuità nell'intervallo assegnato [0;1].

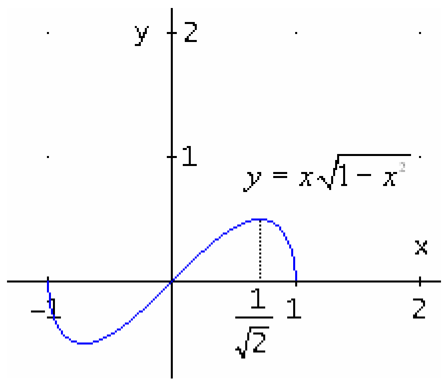
La derivata prima della funzione è:

$$f'(x)=\sqrt{1-x^2}+x\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)=\ \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

ed esiste nell'intervallo aperto]-1;1[. Nell'intervallo aperto]0;1[, la funzione è dunque derivabile.

Agli estremi dell'intervallo la funzione si annulla: f(0)=f(1)=0.

Poiché sono soddisfatte tutte le ipotesi richieste nel teorema di Rolle esiste pertanto almeno un punto *c* interno all'intervallo in cui si annulla la derivata prima.



Risolvendo l'equazione $f'(x)=0$ si trovano i valori $x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Evidentemente il punto c=x_1 ed è l'unico punto in cui la funzione ha la proprietà richiesta.

e) $f(x)=e^{3x-x^2}$, in [0;3]

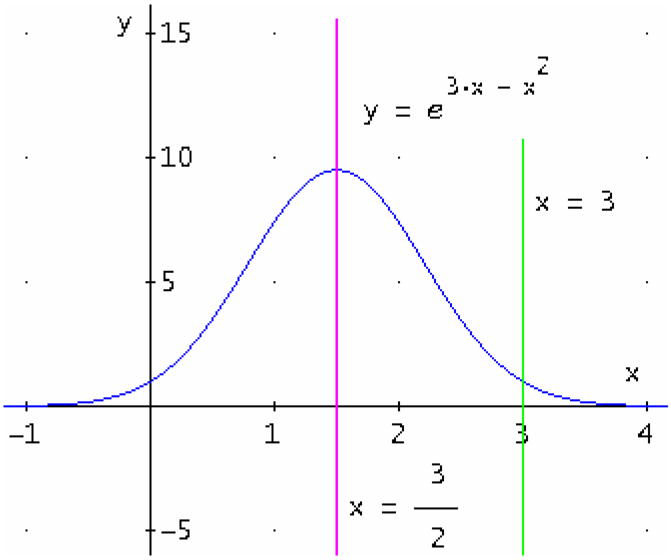
La funzione è definita su tutto l'asse reale ed è continua e derivabile in tutto il dominio. Agli estremi dell'intervallo assegnato assume lo stesso valore:

$f(0)=f(3)=1$

Sono dunque soddisfatte le ipotesi del teorema di Rolle. Risolviamo l'equazione $f'(x)=0$ per determinare il previsto punto (o i punti) in cui si annulla la derivata prima.

$f'(x)=e^{3x-x^2}\cdot(3-2x)=0 \rightarrow x=\frac{3}{2}$

Il punto trovato è interno all'intervallo ed è unico.



f) $f(x)=x\left(2|x|-x^2\right)$, in [-2;2]

La funzione è definita e continua su tutto l'asse reale. Agli estremi dell'intervallo assegnato si annulla.

Derivabilità

Si osservi che la funzione si presenta nella forma

$$f(x)=\begin{cases}-x^2(2+x) & per \quad x<0\\ x^2(2-x) & per \quad x\geq 0\end{cases}$$

Per la derivata prima si ha

$$f'(x)=\begin{cases}-4x-3x^2 & per \quad x<0\\ 4x-3x^2 & per \quad x>0\end{cases}$$

Poiché risulta $\lim_{x\to 0^-} f'(x)=0 = \lim_{x\to 0^+} f'(x)=0$, per il criterio sufficiente di derivabilità la funzione è derivabile nel punto x=0 e lo è anche in ogni altro punto del dominio.

La funzione verifica le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo assegnato. Determiniamo il punto o i punti previsti.

Per $-2<x\leq 0$ si ha

$f'(x)=0 \rightarrow -4x-3x^2=0 \rightarrow x_1=0, x_2=-\frac{4}{3}$;

per $0<x\leq 2$ si ha

$f'(x)=0 \rightarrow 4x-3x^2=0 \rightarrow x_3=\frac{4}{3}$

Come si vede i punti x_1, x_2, x_3 sono tutti interni all'intervallo assegnato e dunque esistono tre punti che verificano la tesi del teorema.