Serie Numeriche e Convergenza Puntuale di Serie di Funzioni

Sunto- Il lavoro contiene la risoluzione di alcuni esercizi sullo studio del carattere di serie numeriche e sulla convergenza puntuale di serie di funzioni. Gli esercizi svolti permettono di rivisitare le tecniche applicative nello studio del carattere di una serie utilizzando uno dei seguenti criteri: del rapporto, della radice, di Leibniz, del confronto di Gauss e del confronto asintotico, del confronto integrale. Per altri esercizi sono forniti opportuni suggerimenti come guida alla risoluzione e sono indicati i risultati. A corredo del lavoro sono proposti altri esercizi da risolvere. Si segnala anche un approfondimento a proposito della somma di una serie con i termini a segno alterno che verifica definitivamente le ipotesi del criterio di Leibniz.

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^x}{n^{3-2x}+1}$

La serie è a termini positivi, quindi è regolare. Per lo studio del carattere ci si avvale delle proprietà della serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$$

Ricordiamo che quest'ultima converge per $\forall\alpha>1$ e diverge positivamente $\forall\alpha\leq1$.

Notiamo che

$3-2x>0 \quad \Leftrightarrow \quad x<3/2$;

$x>3-2x \quad \Leftrightarrow \quad x>1$

Sussistono i seguenti casi

Caso $x<0$

Il numeratore della termine generale della serie per $n\to+\infty$ è infinitesimo ed il denominatore è infinito $\Rightarrow a_n\to0$;

in particolare possiamo scrivere

$$a_n=\frac{n^x}{n^{3-2x}+1}=\frac{n^x}{n^{3-2x}\left(1+\frac{1}{n^{3-2x}}\right)}=\frac{1}{n^{3-3x}\left(1+\frac{1}{n^{3-2x}}\right)} \qquad (1.1)$$

quindi la serie in esame ha lo stesso carattere della seria armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{3-3x}} \quad \text{che converge se } 3-3x>1\Leftrightarrow x<\frac{2}{3};$$

poiché si sta considerando il caso $x<0$ la condizione è soddisfatta, dunque la serie **converge**.

Caso $x = 0$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}a_n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3+1}\Rightarrow$ la serie ha lo stesso carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$ che **converge**.

Caso $0<x<3/2$

Sia il numeratore che il denominatore del termine generale della serie, per $n\to+\infty$, tendono a $+\infty$;

tenendo presente la (1.1), la serie ha ancora lo stesso carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{3-3x}}$, quindi

converge per $x\in\left]0;\frac{2}{3}\right[$; per $x\in\left[\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right[$ risulta $3-3x\leq1$ quindi la serie diverge positivamente.

Caso $x = 3/2$

La serie assume la seguente forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{\frac{3}{2}}}{2}$$ il cui termine generale diverge a $+\infty$ e quindi la serie stessa diverge positivamente.

Caso $x > 3/2$

Il numeratore del termine generale tende a $+\infty$, il denominatore è infinitesimo e quindi risulta

$$\lim_{x\to+\infty} a_n = +\infty;$$

la serie diverge positivamente.

Riassumendo i casi precedenti scriviamo:

$x < \frac{2}{3} \Rightarrow$ la serie **converge**; $x \geq \frac{2}{3} \Rightarrow$ la serie **diverge** positivamente.

Esercizi proposti- Verificare che per le serie seguenti sussistono i risultati indicati

1.a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+n^{3x}}{n^4+n^{1-2x}}$

Risultato: La serie **converge per *x*<1**;
diverge positivamente per *x*≥1.

1.b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^x}{n^{2x-1}+5}$

Risultato: La serie **converge** per $x<-1 \vee x>2$;
diverge positivamente per $-1 \leq x \leq 2$.

1.c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^x}{n^{4-x}+3}$

Risultato: La serie **converge** per $x<3/2$;
diverge positivamente per $x \geq 3/2$.

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^3 e^{1-nx}$

La serie è a termini positivi e si studia agevolmente con il **criterio del rapporto**.

Risultato: La serie **converge per *x*>0** e **diverge positivamente per x≤0**.

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^x}{(n+2)!}$

La serie è a termini positivi e la si studia con il **criterio del rapporto**.

Risultato: La serie **converge** $\forall x \in \mathbb{R}$.

Altre serie che si studiano con il criterio del rapporto

3.a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{n(x-1)}}{n!}$ Risultato: **Converge** per ogni x reale.

3.b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{n^2 x}}{n!}$ Risultato: **Converge** per $x \leq 0$; **diverge positivamente** per $x>0$.

3.c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{e^{n^2 x}}$ Risultato: **Diverge positivamente** per $x \leq 0$; **converge** per $x>0$.

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+2)!}{(n+1)^2 \cdot n!}$

La serie è a termini positivi, quindi è regolare. Si può semplificare l'espressione del temine generale:

$$a_n = \frac{(n+2)!}{(n+1)^2 \cdot n!} = \frac{(n+2)(n+1)n!}{(n+1)^2 \cdot n!} = \frac{n+2}{n+1}$$

A questo punto studiando il limite del termine generale

$$\lim_{n\to+\infty} a_n$$

si evince che non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza (perché non è infinitesimo) quindi….

Risultato: La serie **diverge** positivamente.

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2n-3}{4n+1}\right)^{2nx-3}$

La serie è a termini positivi e la si studia con il **criterio della radice**. Si ha:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n-3}{4n+1}\right)^{2nx-3}} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n-3}{4n+1}\right)^{\frac{2nx-3}{n}} = \frac{1}{2^{2x}} = 4^{-x}$$

Risultato: La serie **converge** se $4^{-x} < 1 \Leftrightarrow x > 0$, **diverge** positivamente per $x \leq 0$.

6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{n(x-2)}$

Si tratta di una serie a termini positivi, in particolare è una **serie geometrica** di ragione

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^{(n+1)(x-2)}}{e^{n(x-2)}} = e^{x-2}$$

Una **serie geometrica converge se la sua ragione è in valore assoluto minore di uno** ($|q| < 1$), mentre non converge se $|q| \geq 1$. Nel caso in esame se la serie non converge (essendo a termini positivi) diverge positivamente.

Ebbene risulta

$$0 < e^{x-2} < 1 \Leftrightarrow x < 2$$

Risultato:

La serie **converge** per $x<2$ e la sua somma vale

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{n(x-2)} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{e^{x-2}}{1-e^{x-2}};$$

per $x \geq 2$ la serie **diverge positivamente**.

7) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n \cdot \log n}$

La serie è a termini positivi, quindi è regolare. Lo studio del carattere della serie si effettua con il **criterio del confronto integrale**.

Intanto osserviamo che è soddisfatta la condizione necessaria (C.N.) per la convergenza

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

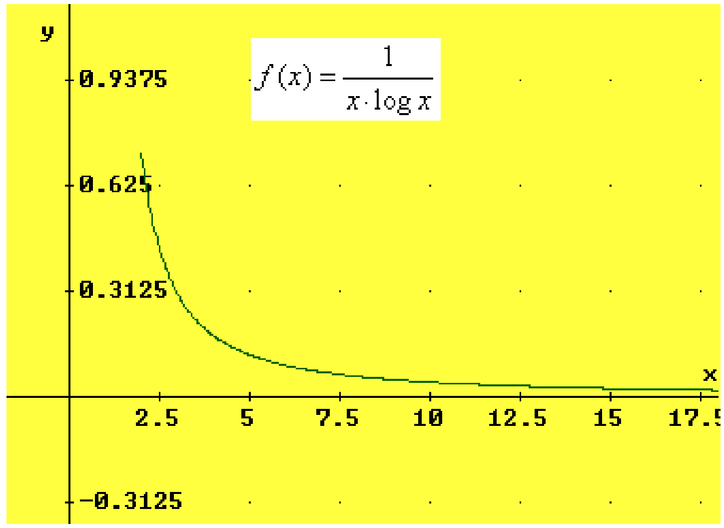
ma proveremo che **la serie diverge positivamente**.

Considerando la funzione di variabile reale $f(x) = \dfrac{1}{x \cdot \log x}$, per $x \geq 2$,

proviamo che sono soddisfatte tutte le ipotesi del criterio del confronto integrale:

- $f(n) = a_n$, $\forall n = 2,3,...$;
- la funzione è positiva in tutto l'intervallo $[2;+\infty[$;
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\cdot\log x} = 0$;
- in ogni punto dell'intervallo considerato la derivata prima è strettamente negativa:
  $f'(x) = -\frac{\log x + 1}{(x\cdot\log x)^2} < 0$

  e quindi la funzione è ivi strettamente decrescente.



Studiando l'integrale generalizzato $\int_2^{+\infty} f(x)dx$ si ha:

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\cdot\log x}dx = \lim_{k\to+\infty}\int_2^k \frac{1}{x\cdot\log x}dx = \lim_{k\to+\infty}\left[\log\left|\log x\right|\right]_2^k = \lim_{k\to+\infty}\left[\log\left|\log k\right| - \log\left|\log 2\right|\right] = +\infty$$

e quindi in virtù del suddetto criterio **la serie diverge positivamente**.

8) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\cdot\log^2 n}$

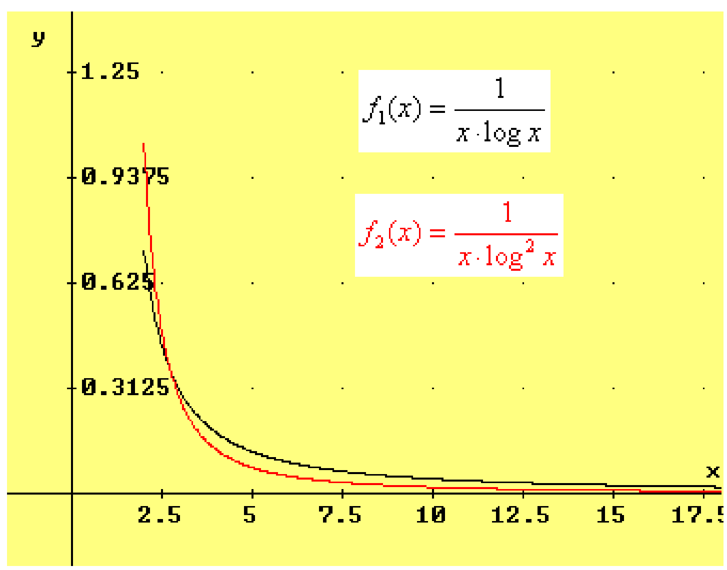
Anche per questa serie lo studio del carattere si effettua con il **criterio del confronto integrale**.

E' soddisfatta la C.N. per la convergenza: $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Come funzione reale di variabile reale associata si considera: $f(x) = \frac{1}{x\cdot\log^2 x}$, per $x \geq 2$, che verifica tutte le ipotesi richieste dal suddetto criterio:

- $f(n) = a_n$, $\forall n = 2,3,...$;
- la funzione è positiva in tutto l'intervallo $[2;+\infty[$;
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$;
- in ogni punto dell'intervallo considerato la derivata prima è strettamente negativa:
  $f'(x) = -\frac{\log^2 x + 2\log x}{(x\cdot\log^2 x)^2} < 0$

  e quindi la funzione è ivi strettamente decrescente.



Studiando l'integrale generalizzato $\int_2^{+\infty} f(x)dx$ si ha:

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\cdot\log^2 x}dx = \lim_{k\to+\infty}\int_2^k \frac{1}{x\cdot\log^2 x}dx = \lim_{k\to+\infty}\int_2^k (\log x)^{-2} D(\log x)dx =$$

$$\lim_{k\to+\infty}\left[-\frac{1}{\log x}\right]_2^k = \lim_{k\to+\infty}\left[-\frac{1}{\log k}+\frac{1}{\log 2}\right]=\frac{1}{\log 2}$$

Risultato: Poiché l'integrale converge si conclude che anche **la serie considerata è convergente.**

Osservazione

In figura sono riportati i diagrammi delle funzioni utilizzate per lo studio della serie dell'esercizio n.7 ($f_1(x)$) e di quella del presente esercizio ($f_2(x)$). Si noti che per $x\to+\infty$, $f_2(x)$ tende a zero più velocemente di $f_1(x)$.

9) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\log n}{n}$

Il carattere della serie (i cui termini sono positivi dal secondo in poi) può essere determinato facendo ricorso al **criterio del confronto di Gauss**. Infatti, osserviamo che

$$n\geq 3 \Rightarrow \frac{\log n}{n} > \frac{1}{n}$$

e quindi la serie è definitivamente maggiorante della serie armonica fondamentale $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n}$ che è divergente positivamente e quindi anche la serie in esame diverge positivamente.

Risultato: La serie **diverge positivamente**.

10) $\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{\log n}{n}$

La serie ha i termini a segno alterno e può essere studiata con il **criterio di Leibniz**.
Le ipotesi previste nel criterio sono:

a) che i valori assoluti dei termini della serie siano decrescenti: $|a_n|\geq|a_{n+1}|$ (è sufficiente che questa proprietà sia verificata definitivamente)[1];

b) che il $\lim_{n\to+\infty}|a_n|=0$

Dimostrazione

a) Consideriamo la funzione

$$f(x)=\frac{\log x}{x}\text{, per } x\in[1;+\infty[$$

ed osserviamo che la sua derivata prima

$$f'(x)=\frac{1-\log x}{x^2}$$

è negativa per $x>e$, quindi la funzione è strettamente decrescente nell'intervallo $]e;+\infty[$ $\Rightarrow$ che sono strettamente decrescenti i valori assoluti dei termini della serie dal secondo in poi.

b) Si deve studiare il limite

$$\lim_{n\to+\infty}|a_n| = \lim_{n\to+\infty}\frac{\log n}{n}$$

---

[1] Ricordiamo che il carattere di una serie non è determinato dai primi suoi **k termini**. Se nella serie $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ si sopprimono i primi k termini la nuova serie $R_k=\sum_{n=k+1}^{+\infty}a_n$, detta resto **k-simo** , ha lo stesso carattere di $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$.

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$, ma l'infinito al numeratore non ha ordine ed è inferiore a qualsiasi ordine di infinito prestabilito, quindi è inferiore all'ordine (uno) dell'infinito presente al denominatore $\Rightarrow$ il limite vale zero.
Una diversa giustificazione si può addurre passando al continuo, considerando la funzione ausiliaria $f(x) = \frac{\log x}{x}$ è studiandone il limite per $x \to +\infty$ tramite la **regola di De l'Hôpital**:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} \overset{H.}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

La serie verifica pertanto le ipotesi del criterio di Leibniz e quindi converge.
In tabella Tab.1 sono riportati relativamente ai **primi venti termini** i valori assoluti, i valori effettivi ed i valori delle somme parziali. In tabella Tab.2 sono riportate le informazioni relative ai termini 50°, 100°, 200°, 300°, 400°, 500°.

Tab.1

n	$\lvert a_n \rvert = \frac{\log n}{n}$	$a_n = (-1)^n \frac{\log n}{n}$	S_n
2	0,34657359	0,34657359	0,346574
3	0,3662041	-0,366204096	-0,01963
4	0,34657359	0,34657359	0,326943
5	0,32188758	-0,321887582	0,005056
6	0,29862658	0,298626578	0,303682
7	0,27798716	-0,277987164	0,025695
8	0,25993019	0,259930193	0,285625
9	0,24413606	-0,244136064	0,041489
10	0,23025851	0,230258509	0,271748
11	0,21799048	-0,217990479	0,053757
12	0,20707555	0,207075554	0,260833
13	0,1973038	-0,197303797	0,063529
14	0,18850409	0,188504095	0,252033
15	0,18053668	-0,18053668	0,071496
16	0,1732868	0,173286795	0,244783
17	0,16665961	-0,166659608	0,078123
18	0,16057621	0,160576209	0,2387
19	0,15497047	-0,154970473	0,083729
20	0,14978661	0,149786614	0,233516
21	0,14497726	-0,144977259	0,088539

Tab.2

n	$\lvert a_n \rvert = \frac{\log n}{n}$	$a_n = (-1)^n \frac{\log n}{n}$	S_n
51	0,07709462	-0,07709462	0,121603
101	0,04569426	-0,045694263	0,13711
201	0,0263846	-0,026384602	0,146703
301	0,0189605	-0,018960499	0,150402
401	0,01494753	-0,014947535	0,152403
501	0,0124084	-0,012408395	0,15367

Dalla tabella Tab.1 si vede che dal secondo termine in poi i valori assoluti decrescono strettamente:

$$\lvert a_3 \rvert > \lvert a_4 \rvert > \lvert a_5 \rvert .....$$

Sulla somma della serie si può fare una valutazione, prevedere l'entità dell'errore che si commette sommando i primi k termini. A tal proposito si veda quanto riportato subito dopo l'approfondimento teorico che segue.

Considerazioni sulla somma di una serie i cui termini hanno segni alterni

Per le serie i cui termini sono a segni alterni e che verificano le ipotesi del criterio di Leibniz, per tutti i termini e non definitivamente, si hanno anche informazioni sull'errore che si commette nel valutare la somma. Precisamente, ***sommando i primi n termini****, cioè calcolando la somma parziale n-sima, ed approssimando il valore della somma della serie con il valore ottenuto, l'errore che si commette è inferiore al valore assoluto del primo termine trascurato.*
Ad esempio, sommando i primi cento termini, il valore ottenuto differisce dal valore della somma della serie per meno del valore assoluto del termine a_{101}. In simboli, detta S la somma della serie sussiste la disuguaglianza:

$$\lvert S_{100} - S \rvert < \lvert a_{101} \rvert .$$

Approfondimento (teoria)

Vogliamo soffermarci ulteriormente sulle serie i cui termini hanno segno alterno per *provare che se verificano definitivamente le ipotesi previste nel criterio di Leibniz, allora si verifica comunque che il valore assoluto della differenza tra la somma dei primi n termini e la somma effettiva della serie è minore del valore assoluto del primo termine trascurato, cioè di* $|a_{n+1}|$.

Sia data la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n \qquad (1)$$

e supponiamo che essa verifichi le ipotesi del criterio di Leibniz definitivamente, cioè che sussistano le seguenti proprietà:

a) $\exists\, k\in N : n>k \Rightarrow |a_n|\geq|a_{n+1}|$ (i valori assoluti dei termini sono decrescenti da un certo punto in poi);

b) $\lim_{n\to+\infty}|a_n|=0$

Vogliamo provare che:

1) la serie converge;
2) detta S la somma della serie, sommando comunque i suoi primi n termini, con $n>k$, il valore ottenuto differisce dalla somma della serie per meno del valore assoluto di $|a_{n+1}|$ (cioè del primo termine trascurato nella somma):

$$\left|\sum_{h=1}^{n}(-1)^{h-1}a_h - S\right|<|a_{n+1}|$$

Dimostrazione

1) La serie ottenuta dalla (1) sopprimendo i primi k termini

$$\sum_{n=k+1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n \qquad (2)$$

verifica le ipotesi del criterio di Leibniz, quindi converge. D'altra parte il carattere di una serie non cambia se si sopprimono i suoi primi k termini, quindi se converge la (2) converge anche la (1).

2) Sia S' la somma della serie (2). Sappiamo che sommando i suoi primi p termini il valore ottenuto differisce dalla somma S' per meno di $|a_{k+p+1}|$. In simboli, posto

$$a_{k+1}+a_{k+2}+....+a_{k+p}=S'_{k+p}$$

si verifica la disuguaglianza

$$|S'_{k+p}-S'|<|a_{k+p+1}| \qquad (2.1)$$

Ponendo

$$S_k=a_1+a_2+...+a_k \qquad (1.1)$$

facciamo notare che tra le somme delle due serie (1) e (2) sussiste l'ovvia relazione

$$S=S_k+S' \qquad (1.2)$$

Sommando i primi $k+p$ termini della serie (1) si ha

$$a_1+a_2+...+a_k+a_{k+1}+a_{k+2}+....+a_{k+p}=S_{k+p}=S_k+S'_{k+p}$$

e possiamo scrivere le seguenti uguaglianze

$$|S_{k+p}-S|=\left|\left(S_k+S'_{k+p}\right)-\left(S_k+S'\right)\right|=|S'_{k+p}-S'|$$

e quindi dalla (2.1) ricaviamo la disuguaglianza

$$\left|S_{k+p} - S\right| < \left|a_{k+p+1}\right|$$

Cioè, il valore della somma parziale *k+p-sima* della serie (1) differisce dalla somma della stessa per meno del valore assoluto del primo termine trascurato. Dalla generalità dell'intero p segue la tesi. C.V.D.

Applicazione del risultato alla serie dell'esercizio n.10

In relazione alla somma della serie in esame, utilizzando i dati riportati in Tab.2 e sapendo che la somma dei primi 499 termini della serie è

$$\mathbf{S_{500} \approx 0{,}166078}$$

Possiamo affermare che sussiste la seguente disuguaglianza

$$\left|S_{500} - S\right| < \left|a_{501}\right| \Rightarrow S_{500} - \left|a_{501}\right| < S < S_{500} + \left|a_{501}\right|$$

e quindi, essendo

$a_{501} \approx$ -0,0124084, $S_{500} \approx$ 0,166078

possiamo affermare che per la somma della serie sussistono le limitazioni

0,154<S<0,178

Operando con un foglio elettronico si possono ottenere approssimazioni della somma con la precisione desiderata. Sommando i primi 1999 termini si ha

$$\mathbf{S_{2000} \approx 0{,}161769}$$

ed essendo $\left|a_{2001}\right| \simeq 0{,}0037988$

la somma parziale S_{2000} rappresenta la somma della serie con un errore inferiore 0,0038.

11) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n^x}$, con $x \in R$

La serie è a termini positivi, quindi regolare. Di seguito si riconosce immediatamente che per $x \leq 0$ la serie diverge positivamente. Per lo studio del carattere per $x>0$ non si rivela utile il criterio del rapporto, né quello della radice. Infatti:

con il criterio del rapporto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n+1)}{(n+1)^x} \cdot \frac{n^x}{\log n} = 1; \qquad (11.1)$$

con il criterio della radice

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{\log n}{n^x}}; \qquad (11.2)$$

passando al continuo si studia il limite

$$\lim_{t\to+\infty} \left(\frac{\log t}{t^x}\right)^{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to+\infty} e^{\log\left(\frac{\log t}{t^x}\right)^{\frac{1}{t}}} = e^{\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \cdot \log\left(\frac{\log t}{t^x}\right)} = e^{\lim_{t\to+\infty} \frac{\log(\log t) - x \log t}{t}} =$$

$$e^{\lim_{t\to+\infty} \frac{\log(\log t) - x \log t}{t}} = e^{\lim_{t\to+\infty} \frac{\log(\log t)}{t} - \lim_{t\to+\infty} \frac{x \log t}{t}} = e^{0-0} = 1$$

Da questo risultato si deduce che anche il limite (11.2) vale uno. I due criteri non sono perciò utilizzabili.

Effettuiamo lo studio del carattere distinguendo i diversi casi

- Caso $x<0$

  Il termine generale della serie tende a $+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n^x} = \lim_{n\to+\infty} n^{-x} \cdot \log n = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

e quindi non è soddisfatta la C.N. per la convergenza ed essendo a termini positivi si conclude che la serie **diverge** positivamente.

- Caso $x = 0$

  $a_n = \log n \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \Rightarrow$ la serie **diverge** positivamente.

- Per valori positivi del parametro x confronteremo la serie con la serie armonica generalizzata.
  - Caso $0<x\leq 1$

    Per questi valori del parametro la serie è definitivamente maggiorante della serie armonica generalizzata

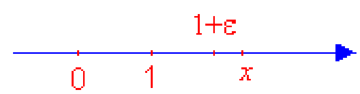
    $$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$$

    Infatti, per $n\geq 3$ risulta $\frac{\log n}{n^x} > \frac{1}{n^x}$ e poiché per tali valori del parametro x la serie armonica generalizzata diverge positivamente, diverge anche positivamente la serie in esame.
  - Caso $x>1$

    Osserviamo subito che per questi valori del parametro il termine generale della serie è infinitesimo per $n \to +\infty$:

    $$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log n}{n^x} = 0$$

    quindi è soddisfatta la condizione necessaria (C.N.) per la convergenza.

    Ciò premesso, per ciascuno dei valori x, scegliamo $\varepsilon>0$ tale che risulti

    $1+\varepsilon<x$

    e consideriamo la serie armonica generalizzata

    $$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{1+\varepsilon}} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \qquad (11.3)$$

    Sappiamo che la (11.3) è convergente. Confrontiamo asintoticamente con essa la serie in esame (facciamo riferimento quindi al criterio del confronto asintotico).

    $$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\log n}{n^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

    Studiamo il seguente limite

    $$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{\log n}{n^x}}{\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\log n}{n^x}\cdot n^{1+\varepsilon} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\log n}{n^{x-1-\varepsilon}}$$

    Essendo x-1-$\varepsilon>0$ il limite vale zero(2) e quindi in virtù del criterio del confronto asintotico la serie in esame **converge**.

(2)Si tratta di un limite notevole: il numeratore è un infinito di ordine inferiore all'infinito del denominatore.In ogni caso, passando al continuo, basta applicare la **regola di De l'Hôpital** nel limite corrispondente:

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\log t}{t^{x-1-\varepsilon}} \overset{H.}{=} \lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{1}{t}}{(x-1-\varepsilon)t^{x-1-\varepsilon-1}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{(x-1-\varepsilon)t^{x-1-\varepsilon}} = 0$$

Esercizi simili proposti

Studiare le serie al variare del parametro x reale

11.a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(2n+3)}{n^x+1}$ Risultato: Diverge positivamente per $x \le 1$; converge per $x>1$.

11.b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(n+1)}{n^{2-x}+1}$ Risultato: Converge per $x<1$; diverge positivamente per $x \ge 1$.

11.c) $\sum_{n=8}^{+\infty} \frac{\log(n-7)}{n^{3-4x}+1}$ Risultato: Converge per $x<\frac{1}{2}$; diverge positivamente per $x \ge \frac{1}{2}$

12) $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{2x} \cdot \log(n^2+1)$

La serie è a termini positivi e si riconosce immediatamente che per $x \ge 0$ diverge positivamente perché

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$$

Per $x<0$ scriviamo la serie nella forma seguente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(n^2+1)}{n^{-2x}}$$

Consideriamo i due casi

a) $0<-2x\le 1$

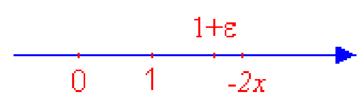
b) $-2x>1$

Nel primo caso osserviamo che per $n \ge 2$ sussiste la disuguaglianza

$$\frac{\log(n^2+1)}{n^{-2x}} > \frac{1}{n^{-2x}}$$

e quindi la serie in esame è definitivamente maggiorante della serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{-2x}}$, che se $-2x\le 1$ diverge positivamente, quindi anche **la serie** in questione **diverge positivamente**.

Nel secondo caso, scegliamo un $\varepsilon>0$ tale che si abbia $1+\varepsilon<-2x$ e consideriamo la serie armonica generalizzata



$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

Questa converge; utilizzando il criterio del confronto asintotico proviamo che converge anche la serie in esame. Infatti si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\log(n^2+1)}{n^{-2x}}}{\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n^2+1)}{n^{-2x-(1+\varepsilon)}} = 0;$$

a questo punto per il suddetto criterio **la serie converge**.

13) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{\sqrt{n}}}{2^n}$

- La serie è a termini positivi , dunque regolare.

- Per lo studio del limite del termine generale a_n, che si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$, è opportuno passare alla forma esponenziale come di seguito indicato:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{\sqrt{n}}}{2^n}=\lim_{n\to+\infty}e^{\log\left(\frac{n^{\sqrt{n}}}{2^n}\right)}=\lim_{n\to+\infty}e^{\sqrt{n}\log n-n\log 2}=$$
$$\lim_{n\to+\infty}e^{n\left(\frac{\log n}{\sqrt{n}}-\log 2\right)}=e^{+\infty(0-\log 2)}=e^{-\infty}=0$$

Il termine generale è dunque infinitesimo per $n\to+\infty$ quindi è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza della serie.

- Proviamo che la serie è maggiorata definitivamente da una serie numerica convergente, precisamente che sussiste la seguente maggiorazione

$$\exists k\in N: n>k\Rightarrow\frac{n^{\sqrt{n}}}{2^n}<\frac{1}{n^2},$$

e quindi che la serie in esame è definitivamente maggiorata dalla serie numerica convergente $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

Dobbiamo provare che $\frac{n^{\sqrt{n}}}{2^n}<\frac{1}{n^2}\Leftrightarrow\frac{n^{\sqrt{n}+2}}{2^n}<1$ definitivamente. (*)

Conseguiremo l'obiettivo studiando il limite per $n\to+\infty$ del primo membro e facendo vedere che vale zero.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{\sqrt{n}+2}}{2^n}=\lim_{n\to+\infty}e^{\log\left(\frac{n^{\sqrt{n}+2}}{2^n}\right)}=\lim_{n\to+\infty}e^{(\sqrt{n}+2)\log n-n\log 2}=$$
$$\lim_{n\to+\infty}e^{n\left[\frac{(\sqrt{n}+2)}{\sqrt{n}}\cdot\frac{\log n}{\sqrt{n}}-\log 2\right]}=e^{+\infty(1\cdot 0-\log 2)}=e^{-\infty}=0$$

In virtù del risultato ottenuto, scelto un numero reale positivo ε che verifica la condizione 0<ε<1, dalla definizione di limite emerge che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{\sqrt{n}+2}}{2^n}=0\Rightarrow\exists\overline{n}_\varepsilon\in N:\mathrm{n}>\overline{n}_\varepsilon\Rightarrow-\varepsilon<\frac{n^{\sqrt{n}+2}}{2^n}<\varepsilon<1$$

e dunque la disuguaglianza (*) sussiste senz'altro definitivamente, quindi possiamo concludere che la serie in esame è convergente perché è a termini positivi ed è definitivamente maggiorata dalla serie armonica $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$, che è convergente.

14) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-sen\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

La serie è a termini positivi. Il suo termine generale per $n\to+\infty$ è infinitesimo. Per studiare il carattere è necessario ricordare che in virtù del seguente limite

$$\lim_{t\to 0}\frac{t-sen t}{t^3}\overset{H.}{=}\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{3t^2}=\frac{1}{6}$$

la serie in esame ha lo stesso carattere della serie seguente $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{6n^3}$, che è convergente.

15) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-sen\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{2x-3}$

Confrontando la serie riportata nell'esercizio n.14 si deduce che la serie in esame ha lo stesso carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{6n^3}\right)^{2x-3}$, che a sua volta ha lo stesso carattere della serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{3(2x-3)}}$.

La serie:

converge, se $3(2x-3)>1 \Leftrightarrow x>\frac{5}{3}$;

diverge positivamente per $x \le \frac{5}{3}$.

16) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{n}-sen\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

Il carattere di questa serie apparentemente è come quello delle serie numerica vista nell'esercizio n.14; ma non è così. Infatti si riconosce che n→+∞ il termine generale è solo infinitesimo del primo ordine. Precisamente, ponendo $\frac{1}{n}=t$, osservato che $n\to+\infty \Rightarrow t\to 0^+$, studiando il limite

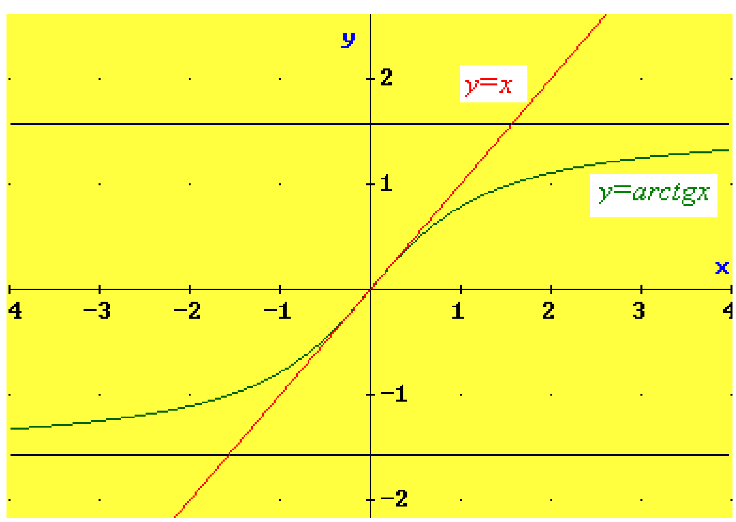
$\lim_{t\to 0^+}\frac{2t-sent}{t}\overset{H.}{=}\lim_{t\to 0^+}\frac{2-\cos t}{1}=1 \Rightarrow$ (dal criterio del confronto asintotico) la serie in esame ha lo stesso carattere della serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$, proprio perché la funzione $\varphi(t)=2t-sent$, per $t\to 0$ è infinitesimo equivalente a t. Poiché la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ diverge positivamente, divergerà positivamente anche la serie in esame.

Esercizio proposto

Provare che la serie

$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{n}-sen\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{x}$ **converge** per $x>1$ e **diverge positivamente** per $x\le 1$.

17) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-arctg\left(\frac{1}{n}\right)\right)$



Dal confronto asintotico con la serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$ si riconosce che le due serie hanno lo stesso carattere e poiché la seconda è convergente sarà convergente anche la serie in esame. Studiamo perciò il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}-arctg\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^3}}$$ che con la sostituzione $\frac{1}{n}=t$ diventa

$$\lim_{t\to0^+}\frac{t-arctgt}{t^3}\overset{H.}{=}\lim_{t\to0^+}\frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{3t^2}=$$

$\lim_{t\to0^+}\frac{t^2}{3t^2(1+t^2)}=\frac{1}{3}$. Avendo ottenuto per il limite un valore finito diverso da zero le due serie hanno lo stesso carattere. Quindi la serie converge.

Esercizi proposti

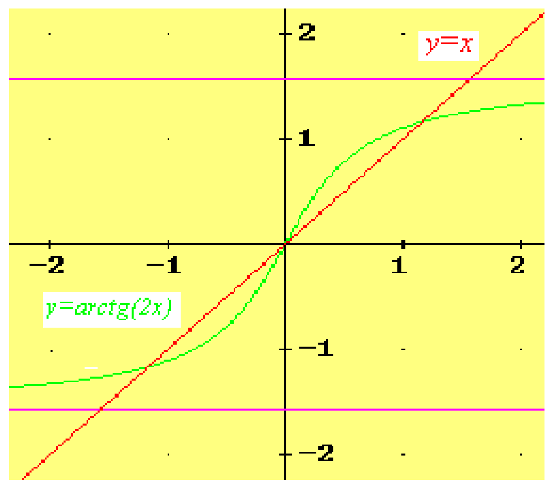
Provare le affermazioni indicate per le serie di seguito riportate[(3)]:

17.a) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-arctg\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{1-x}$ **converge** per $x<2/3$; **diverge positivamente** per $x\geq 2/3$.

17.b) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{n}-arctg\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ ha lo stesso carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$, quindi **diverge positivamente**.

17.c) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-arctg\left(\frac{2}{n}\right)\right)$

la serie è a termini negativi ed ha lo stesso carattere di $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$, perciò **diverge negativamente**.



17.d) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-arctg\left(\frac{2}{n}\right)\right)^2$ la serie è a termini positivi ed ha lo stesso carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ che **converge**.

17.e) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-arctg\left(\frac{2}{n}\right)\right)^x$ con $x\in R$ la serie non ha senso perché il termine generale è una potenza con esponente…..e la cui base è…..

(3) Per le serie proposte possono essere utili i seguenti sviluppi di Taylor di punto iniziale x=0:

$arctgx=x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$ e quindi $x-arctgx=\frac{x^3}{3}+o(x^3)$;

$arctg(2x)=2x-\frac{8x^3}{3}+o(x^3)$ e quindi $x-arctg(2x)=-x+\frac{8x^3}{3}+o(x^3)$.