Sulle componenti cartesiane di un vettore

Premessa

1. Un vettore è un segmento orientato ed è individuato dai suoi estremi A, B, che devono essere distinti.
2. Ogni vettore è caratterizzato da tre parametri che sono: il modulo, la direzione e il verso.
   a. Il modulo rappresenta la lunghezza del segmento AB.
   b. La direzione è quella della retta r alla quale appartengono i due estremi A, B.
   c. Il verso è uno dei due modi con cui si può percorrere il segmento AB: un percorso inizia in A e termina in B, l'altro ha come punto iniziale B e punto finale A.

Indicheremo con $\overrightarrow{AB}$ il vettore avente come primo estremo A e secondo estremo B e con $\overrightarrow{BA}$ il vettore avente come primo estremo B e secondo estremo A. Nell'algebra dei vettori il vettore $\overrightarrow{BA}$ è considerato come il vettore opposto di $\overrightarrow{AB}$ perché la loro somma è il vettore nullo, indicato semplicemente con 0 (zero). Il vettore nullo ha modulo zero, ma non ha direzione, né verso.

Osservazione

Su alcuni testi per rappresentare velocemente il vettore $\overrightarrow{AB}$ si scrive anche $B-A$, dunque, il vettore $\overrightarrow{BA}$ è rappresentato con $A-B$.

Le componenti cartesiane di un vettore nel piano

Quando un vettore è considerato in un piano riferito ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali xOy è particolarmente agevole **descrivere il vettore tramite le coordinate cartesiane dei suoi estremi**.

Come fare?

Innanzitutto si assume come "**base per il sistema dei vettori**" la coppia dei vettori di modulo unitario (detti versori), indicati generalmente con $\vec{i}$ e $\vec{j}$, associati ai due assi cartesiani così definiti:

- $\vec{i}$ è il vettore avente come primo estremo l'origine O(0;0) degli assi e come secondo estremo il punto (1;0);
- $\vec{j}$ è il vettore avente come primo estremo l'origine O(0;0) degli assi e come secondo estremo il punto (0;1).

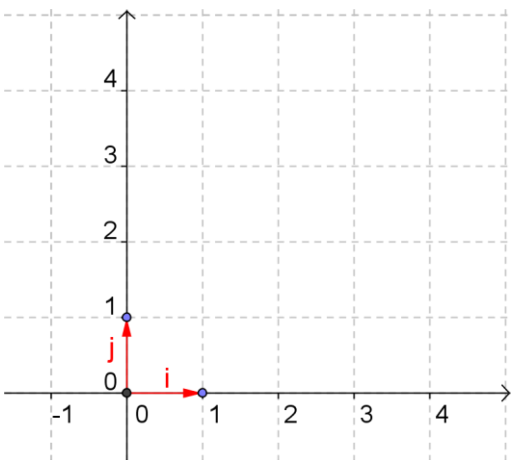

Figura 1

Siano $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ i due estremi del vettore.

Sussistono le seguenti definizioni.

1. Si dicono **componenti cartesiane scalari** del vettore $\overrightarrow{AB}$ i numeri x_B-x_A, y_B-y_A, il primo dei quali è la componente cartesiana lungo l'asse x ed il secondo

quella lungo l'asse y.

2. Si dicono **componenti cartesiane vettoriali** del vettore $\overrightarrow{AB}$ i vettori $(x_B - x_A)\vec{i}$, $(y_B - y_A)\vec{j}$; il primo è la componente vettoriale lungo l'asse x, il secondo quella lungo l'asse y.

Con le precedenti definizioni, nell'algebra dei vettori, risulta

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}. \qquad (1)$$

***

Approfondimento

Nella prosecuzione del presente documento diamo per scontato che il lettore sappia cosa sia uno **spazio vettoriale** ed in particolare che conosca il **piano euclideo $\mathbf{R}^2$** in cui sia definito il **prodotto scalare standard** che ricordiamo di seguito[(1)].

Nel piano euclideo R^2, considerati i due vettori $\vec{u}(u_1;u_2)$, $\vec{v}(v_1;v_2)$, il prodotto scalare standard è definito dalla relazione (forma bilineare)

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 \qquad (2)$$

Osserviamo che dalla commutatività del prodotto nel campo reale R segue la commutatività del prodotto scalare tra vettori, dunque

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u} \qquad (2.1)$$

Modulo (o norma) di un vettore

Con il prodotto scalare (2) ad ogni vettore $\vec{v}(v_1;v_2)$ dello spazio $\mathbf{R}^2$ è associato un numero non negativo, indicato $\|\vec{v}\|$, o semplicemente con v, detto modulo o norma del vettore, definito da

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \qquad (3)$$

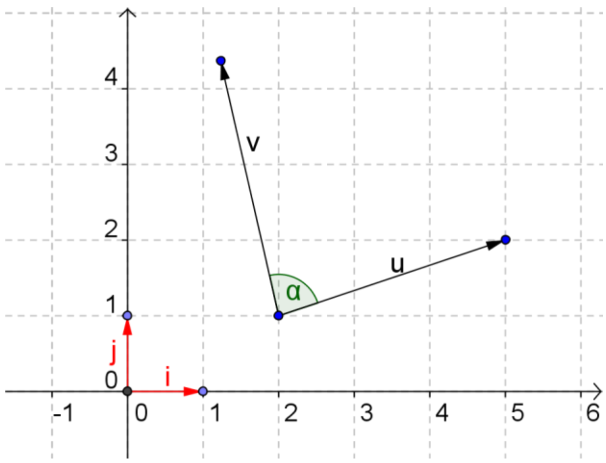

Figura 2

Angolo tra due vettori

Ricordiamo, infine, che sfruttando la definizione di prodotto scalare è possibile definire per due vettori qualsiasi $\vec{u}(u_1;u_2)$, $\vec{v}(v_1;v_2)$ dello spazio vettoriale euclideo $\mathbf{R}^2$ un angolo α ponendo

(1) Ricordiamo che per spazio vettoriale euclideo si intende uno spazio vettoriale in cui sia definito un prodotto scalare. Il prodotto scalare definito in questo documento è un particolare prodotto scalare, detto prodotto scalare canonico o standard in R^2. Il lettore desideroso di approfondimenti sul tema è invitato a consultare un qualsiasi libro di algebra lineare.

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|} = \frac{u_1v_1+u_2v_2}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}\cdot\sqrt{v_1^2+v_2^2}} \qquad (4)$$

Teniamo ora presente che due vettori definiscono due angoli la cui somma è uguale ad un angolo giro (angoli explementari). L'angolo α che compare nella (4) è da intendere come quello dei due angoli la cui ampiezza non supera 180° (Figura 2).

***

Modulo e componenti cartesiane del vettore $\overrightarrow{AB}$

In riferimento alla Figura 3, osserviamo che l'angolo α è quello che il vettore $\overrightarrow{AB}$ forma con la direzione positiva dell'asse delle ascisse e sussistono le seguenti relazioni

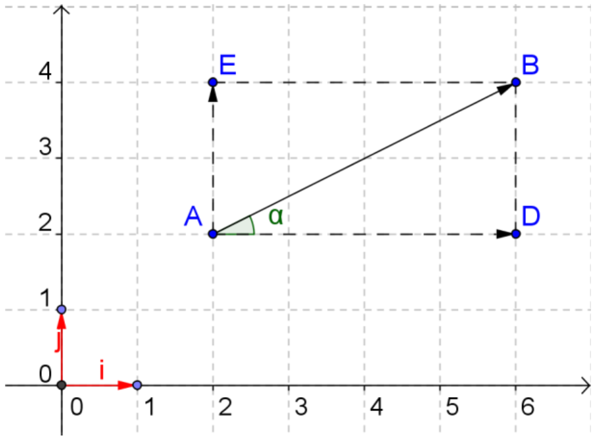

Figura 3

Modulo: $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} \qquad (5)$

Componenti cartesiane scalari

$$x_B - x_A = \|\overrightarrow{AB}\|\cdot\cos\alpha \qquad (6)$$

$$y_B - y_A = \|\overrightarrow{AB}\|\cdot sen\alpha \qquad (7)$$

Componenti vettoriali

$$\overrightarrow{AB}_x = (x_B-x_A)\vec{i}\,, \qquad \overrightarrow{AB}_y = (y_B-y_A)\vec{j} \qquad (8)$$

Modulo e componenti di un vettore con un estremo nell'origine degli assi

Vettore con il primo estremo nell'origine degli assi

Si abbia il vettore $\vec{v}=\overrightarrow{OP}$ e sia α l'angolo che esso forma con la direzione positiva dell'asse x, intendendo che α è l'angolo che deve essere descritto dal versore $\vec{i}$ nella rotazione nel verso antiorario per sovrapporsi al vettore $\vec{v}$ (Figura 4) .

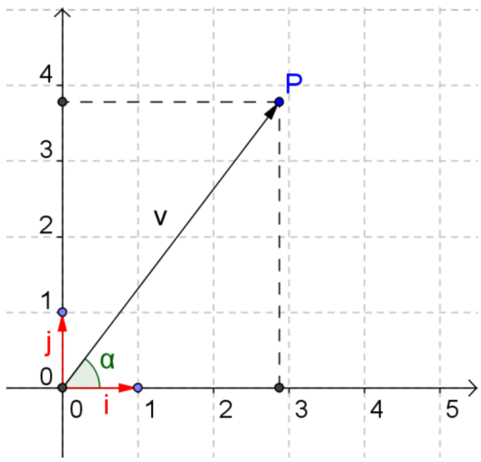

Figura 4

Per le componenti cartesiane ed il modulo di $\vec{v}$ si ha

$$v_x = v\cos\alpha\,,\ v_y = vsen\alpha\,; \qquad (9)$$

$$v = \|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2+v_y^2} \qquad (10)$$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} \qquad (11)$$

Vettore con il secondo estremo (la punta) nell'origine degli assi

a) Consideriamo il vettore $\vec{v}$ di Figura 5

Nell'ipotesi che sia nota **l'ampiezza positiva dell'angolo α formato dalla retta contenente il vettore e dall'asse y**, per esprimere il vettore in forma cartesiana si deve individuare l'ampiezza dell'angolo che il vettore forma con la direzione positiva dell'asse x.

In Figura 5 è stato riportato il vettore $\vec{w}$ equipollente[2] a $\vec{v}$, con il primo estremo nell'origine O degli assi. I due vettori, essendo equipollenti, hanno le stesse componenti cartesiane e la stessa espressione vettoriale.

Il vettore $\vec{w}$ forma con la direzione positiva dell'asse x un angolo che in gradi sessagesimali misura 270°-α per cui la sua espressione cartesiana è

$$\vec{w} = w_x\vec{i} + w_y\vec{j} = \\ w\cos(270° - \alpha)\vec{i} + wsen(270° - \alpha)\vec{j} = \\ -w\left(sen\alpha\vec{i} + \cos\alpha\vec{j}\right)$$

Concludiamo dunque che per il vettore $\vec{v}$ si ha anche

$$\vec{v} = -v\left(sen\alpha\vec{i} + \cos\alpha\vec{j}\right) \qquad (12)$$

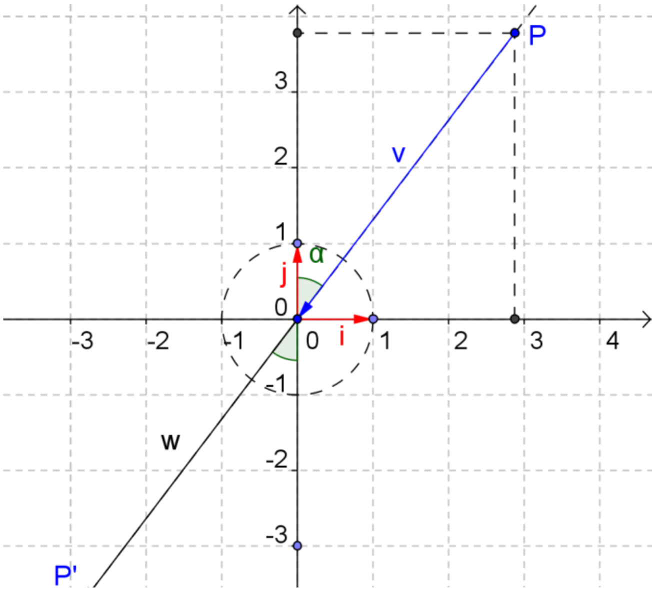

Figura 5

b) Consideriamo ora il vettore $\vec{v}$ di Figura 6

In questo caso supponiamo che sia nota **l'ampiezza positiva dell'angolo α formato dalla retta contenente il vettore $\vec{v}$ e dall'asse x**; ancora, per esprimere il vettore in forma cartesiana, si deve individuare l'ampiezza dell'angolo che il vettore forma con al direzione positiva dell'asse x.

In Figura 6 è stato rappresentato ancora il vettore $\vec{w}$ equipollente a $\vec{v}$, con il primo estremo nell'origine O degli assi e dalla figura si evince che $\vec{w}$ forma con la direzione positiva dell'asse x l'angolo β=180°+α. L'espressione cartesiana del

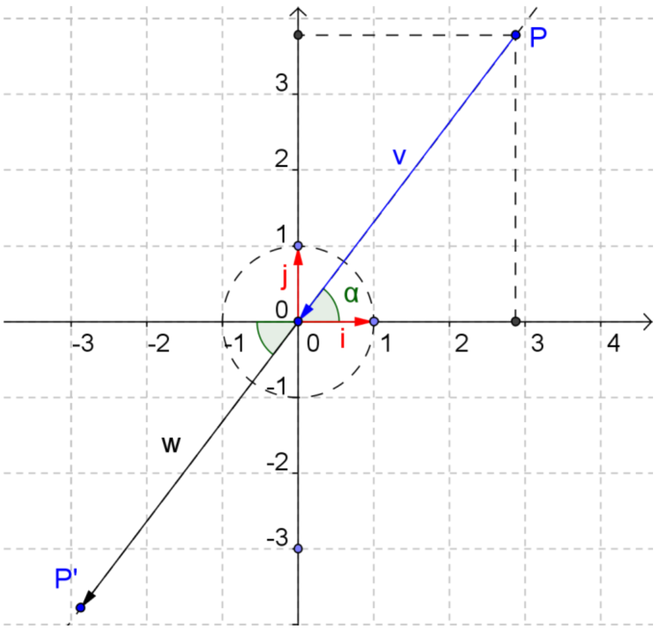

Figura 6

[2] Due vettori si dicono equipollenti se sono tra loro paralleli, hanno lo stesso verso e lo stesso modulo.

vettore $\vec{w}$, e quindi anche di $\vec{v}$, è

$$\vec{w} = w_x \vec{i} + w_y \vec{j} = w\cos\beta\vec{i} + wsen\beta\vec{j} = w\cos(180° + \alpha)\vec{i} + wsen(180° + \alpha)\vec{j} =$$
$$-w\left(\cos\alpha\vec{i} + \overrightarrow{sen\alpha j}\right) = \vec{v} \qquad (13)$$

Osservazione

Le espressioni (12) e (13) per il vettore $\vec{v}$ sono molto simili, in particolare sono scambiati i ruoli di senα e cosα. Ciò non deve meravigliare. Infatti, si riconosce che l'angolo α indicato in Figura 6 è il complementare dell'angolo α indicato in Figura 5; tenendo conto che per due angoli α, β complementari sussistono le relazioni

$$\cos\beta = \cos(90° - \alpha) = sen\alpha \quad \text{e} \quad sen\beta = sen(90° - \alpha) = \cos\alpha \qquad (14)$$

si giustifica il legame tra le due espressioni.