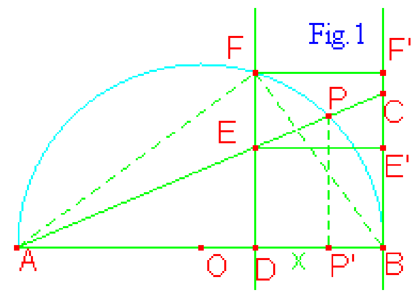
Problema

Sono dati una semicirconferenza Γ di diametro AB=4 ed il triangolo rettangolo ABC tale che la sua ipotenusa AC incontri Γ in P e che risulti $\overline{AC} = 8\sqrt{\frac{2}{5}}$. Si conduca una retta perpendicolare ad AB che incontri rispettivamente AB, Γ ed AC in D, E ed F e siano E' e F' le proiezioni di E ed F su BC.
Si studi, al variare di AD, come varia il volume del solido S generato, in un giro completo attorno ad AB, dal rettangolo EE' F'F.
Osservato che V ha due massimi relativi, si calcoli, quando V assume il suo valore massimo assoluto, l'area della superficie totale S.

Soluzione

- **Osservazioni sulla figura e sul solido S**

In Fig.1 è riportata la figura alla quale facciamo riferimento per determinare la funzione V(x) che esprime il volume del solido indicato nel problema.
Precisiamo subito che il solido in oggetto è composto da un cilindro con una cavità cilindrica.
Occorre effettuare un'importante osservazione sul solido S al variare della posizione del punto D sul diametro AB.



Indicando con P il punto in cui l'ipotenusa AC taglia la semicirconferenza e con P' la sua proiezione ortogonale su AB, notiamo che

- se D si trova tra A e P', il solido S è dato dalla differenza tra il cilindro circolare retto avente raggio di base DF e altezza DB, con il cilindro avente raggio di base DE e la stessa altezza DB;
- se D si trova tra P' e B risulta DE>DF e quindi il solido S è dato dalla differenza tra il cilindro circolare retto avente raggio di base DE e altezza DB, con il cilindro avente raggio di base DF ed altezza DB.

Il volume V(x) del solido ha la seguente espressione

$$V(x) = \left|\pi \cdot \overline{DF}^2 \cdot \overline{BD} - \pi \cdot \overline{DE}^2 \cdot \overline{BD}\right| = \pi \cdot \overline{BD}\left|\overline{DF}^2 - \overline{DE}^2\right| \qquad (1)$$

- **Misure dei segmenti utili**

Poniamo $\overline{BD} = x \Rightarrow \overline{AD} = 4 - x$. Dal contesto del problema emerge che $x \in [0;4]$.
Il triangolo rettangolo ABC ha il diametro AB della semicirconferenza come cateto.
Essendo note le misure $\overline{AB} = 4$, $\overline{AC} = 8 \cdot \sqrt{\frac{2}{5}}$, applicando il teorema di Pitagora al triangolo ABC, si ricava la misura di BC: $\overline{BC} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{\left(8 \cdot \sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2 - 4^2} = 4 \cdot \sqrt{\frac{3}{5}}$.

Osserviamo ora che i triangoli ADE, ABC sono simili perché entrambi rettangoli ed hanno in comune l'angolo nel vertice A. Sussiste pertanto l'uguaglianza

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{DE} = \overline{AD} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = (4 - x) \cdot \sqrt{\frac{3}{5}}$$

La misura del segmento DF si può dedurre applicando il secondo teorema di Euclide al triangolo rettangolo ABF (l'angolo nel vertice F è retto perché inscritto in una semicirconferenza) e dunque risulta $\overline{DF} = \sqrt{\overline{AD} \cdot \overline{DB}} = \sqrt{(4 - x)x}$.

Calcolo della misura del segmento P'B

Ponendo brevemente $\overline{P'B}=y \Rightarrow \overline{AP'}=4-y$; dal secondo teorema di Euclide applicato al triangolo rettangolo APB, per il segmento PP' si deduce $\overline{PP'}=\sqrt{(4-y)y}$. D'altra parte dalla similitudine dei triangoli APP', ABC si ricava anche l'uguaglianza

$$\frac{\overline{PP'}}{\overline{AP'}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{\sqrt{(4-y)y}}{4-y}=\frac{4\sqrt{\frac{3}{5}}}{4} = \Rightarrow \sqrt{\frac{y}{4-y}}=\sqrt{\frac{3}{5}} \Rightarrow y=\frac{3}{2}$$

Risulta, dunque, $\overline{P'B}=\frac{3}{2}$.

- **Calcolo del volume**

$$V(x)=\pi\cdot\overline{BD}\left|\overline{DF}^2-\overline{DE}^2\right|=\pi x\left|(4-x)x-(4-x)^2\cdot\frac{3}{5}\right|=\frac{4\pi x}{5}(4-x)\left|2x-3\right|$$

Si deve dunque studiare la funzione V(x) ottenuta limitatamente all'intervallo [0;4] in cui ha senso il problema in esame.
La funzione è non negativa nel dominio ed ammette tre zeri: x_1=0 (per questo valore il punto D coincide con B), $x_2=\frac{3}{2}$ (in questo caso il punto D coincide con P'), x_3=4, per questo valore D coincide con A.

Monotonia, massimi e minimi relativi e assoluti

Facciamo presente che la funzione è razionale intera, continua in tutto il dominio, che è chiuso e limitato, perciò per il teorema di Weierstrass ammette certamente sia il massimo che il minimo assoluti. Per quanto riguarda il minimo assoluto è lo zero ed è assunto in ciascuno dei precedenti punti x_1, x_2, x_3. Per determinare il massimo assoluto ed altri eventuali punti di massimo o minimo relativi si deve passare allo studio del segno della derivata prima.

$$V'(x)=\begin{cases}\frac{8\pi}{5}\left(3x^2-11x+6\right), per...0\le x<\frac{3}{2}\\ -\frac{8\pi}{5}\left(3x^2-11x+6\right), per...\frac{3}{2}\le x\le 4\end{cases}$$

Dallo studio del segno si ha:

$V'(x)\ge 0 \Leftrightarrow$

$\left(0<x\le\frac{2}{3}\right)\vee\left(\frac{3}{2}<x\le 3\right)$

I punti $x=\frac{2}{3}$, $x=3$, sono di massimo relativo proprio, mentre il punto $x=\frac{3}{2}$ è di minimo assoluto; avendosi $V\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{80}{27}\pi$ e $V(3)=\frac{36}{5}\pi$, si deduce che il massimo assoluto è assunto per $x=3$.

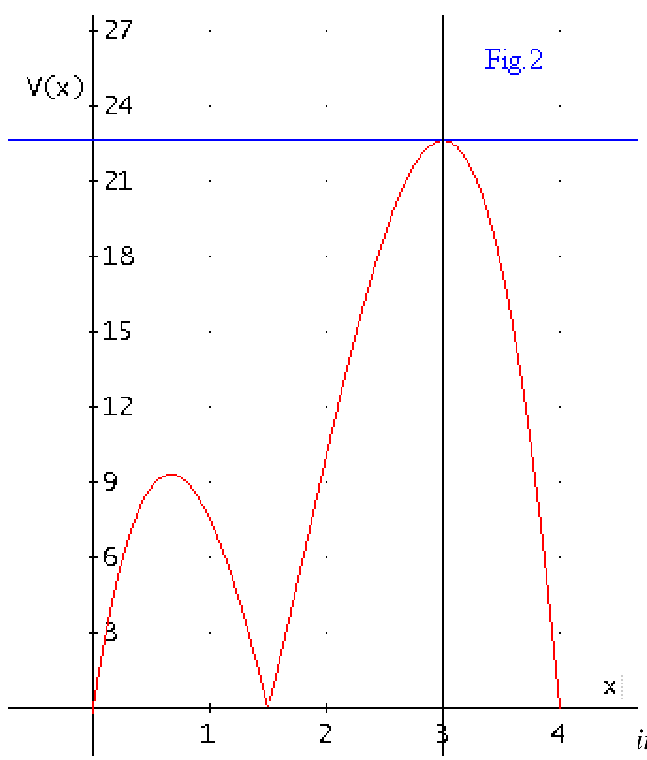


Fig. 2

- Calcolo dell'area della superficie totale per il valore x=3

L'area della superficie totale del solido si ottiene sommando le aree delle superfici laterali dei due cilindri con la somma delle aree delle due corone circolari che rappresentano le basi del solido S. Dunque

$$S(x) = 2\pi \cdot \overline{DF} \cdot \overline{BD} + 2\pi \cdot \overline{DE} \cdot \overline{BD} + 2\pi \left| \overline{DF}^2 - \overline{DE}^2 \right| = 2\pi \cdot \left[\overline{BD} \cdot \left(\overline{DF} + \overline{DE} \right) + \left| \overline{DF}^2 - \overline{DE}^2 \right| \right]$$

e ponendo x=3 si ha

$$S(3) = 2\pi \cdot \left[3 \cdot \left(\sqrt{3} + \sqrt{\frac{3}{5}} \right) + \left| 3 - \frac{3}{5} \right| \right] = \frac{12\pi}{5}\left(3\sqrt{15} + 2\right)$$